

УДК 517.9+523.2+534.1

МАТЕМАТИКА

А. М. МОЛЧАНОВ

РЕЗОНАНСЫ В МНОГОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 26 VIII 1965)

Показано, что резонанс общего положения заменой переменных — введением резонансных фаз — сводится к частному случаю одночастотного резонанса, когда частота проходит через нуль. Введенные понятия иллюстрированы примером резонансов в Солнечной системе.

п. 1. Изучаются многочастотные колебания вида

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \varepsilon F(I, \varphi, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega(I) + \varepsilon \Omega(I, \varphi, \varepsilon),\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь ε — малый параметр; $I = (I_1, \dots, I_k)$ — медленные переменные; $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_l)$ — быстрые (фазовые переменные). Правые части — гладкие функции своих аргументов, периодические с периодом 2π по каждой фазе.

Разделение переменных на быстрые и медленные имеет асимптотический смысл (при $\varepsilon \rightarrow 0$). Если положить $\varepsilon = 0$, то медленные переменные становятся первыми интегралами системы $I = I_0$. Быстрые переменные остаются, вообще говоря, переменными даже при $\varepsilon = 0$. Однако некоторые комбинации фаз (их принято называть резонансными) могут стать постоянными при $\varepsilon = 0$. Для более точного описания ситуации введем некоторые определения.

Определение 1. Поверхность в пространстве I медленных переменных, определяемая равенством

$$(\mathbf{n}, \vec{\omega}) \equiv n_1 \omega_1(I) + \dots + n_l \omega_l(I) = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_l)$ — целочисленный вектор, называется резонансной поверхностью, а \mathbf{n} — вектором резонанса.

Определение 2. Целочисленная линейная комбинация фаз

$$\psi = n_1 \varphi_1 + \dots + n_l \varphi_l \tag{3}$$

называется резонансной фазой данного резонанса.

Определение 3. Индексом сложности точки I (или сложностью состояния I) называется число s линейно независимых резонансных соотношений, которым удовлетворяет точка I .

п. 2. В пространстве I медленных переменных подавляющая часть точек — множество полной меры — это точки индекса 0, не лежащие ни на одной из резонансных поверхностей (2). Если воспользоваться, как это часто делают, вероятностной терминологией, то можно сказать, что «вероятность точке иметь индекс 1 равна нулю». Нужно, однако, учесть медленное движение, одномерные траектории которого обязательно пересекают резонансные поверхности индекса 1. Поэтому с точки зрения теории меры (1) кажется разумным изучение резонансов индекса 1. Что же касается резонансов сложности 2, то «вероятность» наткнуться на такую точку в практической задаче равна нулю.

Тем более неожиданным и примечательным является результат анализа резонансных соотношений, имеющих место в Солнечной системе. Забегая вперед, подчеркнем главное. Во всех разобранных случаях сложность имеет максимальное возможное значение.

Из сказанного выше ясно, что объяснить случайностью этот факт невозможно. Значительно более удовлетворительной представляется другая возможность объяснения — полная резонансность всех подсистем Солнечной системы есть неизбежный результат долгой эволюции.

п. 3. Каноническая форма системы резонансов. В дальнейшем при изучении явлений, имеющих место при прохождении резонанса, очень важно иметь возможность ввести в качестве независимых фазовых переменных именно резонансные фазы данной системы резонансов. Замена фазовых переменных

$$\psi = A\varphi, \quad \varphi = B\psi \quad (4)$$

должна сохранять вид системы (1), т. е. периодичность по фазам. Это означает, что обе матрицы A и B должны быть целочисленными.

При исследовании существенную роль играет

Теорема биортогонализации. Если целочисленные векторы $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_s$ линейно независимы, то существует целочисленная биортогональная система $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s$ такая, что векторы $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_s$ получаются из векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ целочисленным треугольным преобразованием

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= T_{11}\mathbf{a}_1, \\ \mathbf{n}_2 &= T_{21}\mathbf{a}_1 + T_{22}\mathbf{a}_2, \\ &\vdots \\ \mathbf{n}_s &= T_{s1}\mathbf{a}_1 + T_{s2}\mathbf{a}_2 + \dots + T_{ss}\mathbf{a}_s. \end{aligned} \quad (5)$$

Теорема доказывается методом, аналогичным известному методу ортонормализации Лагранжа (2), но с видоизменениями, вытекающими из целочисленности задачи. Главное из них — замена ортонормальной системы биортонормальной (2). При доказательстве используется лемма, легко вытекающая из алгоритма Эвклида (3):

Лемма. Для любого целочисленного вектора \mathbf{a} найдется целочисленный вектор \mathbf{b} такой, что их скалярное произведение $d = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ равно общему наибольшему делителю компонент вектора \mathbf{a} .

Теорема о приведении произвольной системы резонансов

$$(\mathbf{n}_1, \vec{\omega}) = 0, \dots, (\mathbf{n}_s, \vec{\omega}) = 0 \quad (6)$$

к каноническому виду

$$\omega_1(I) = 0, \dots, \omega_s(I) = 0 \quad (7)$$

вытекает из сформулированной выше теоремы почти непосредственно. Для доказательства надо резонансные векторы $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_s$ дополнить произвольным образом до целочисленного базиса $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_s, \mathbf{n}_{s+1}, \dots, \mathbf{n}_l$ и биортогонализировать этот базис. Векторы \mathbf{a}_i , расположенные в строках, образуют целочисленную квадратную матрицу A , а столбцы \mathbf{b}_k — матрицу B , причем биортогональность означает просто, что

$$AB = E. \quad (8)$$

Поэтому матрицы A и B можно использовать для построения замены переменных (4). При этом первые s фаз автоматически будут резонансными из-за треугольности преобразования (5).

п. 4. Резонансы в Солнечной системе. С точки зрения теории колебаний любая планетная система есть набор слабо связанных колебательных систем, причем число фаз равно числу планет. В Солнечной системе есть по крайней мере 4 подобные подсистемы — 9 планет, 4 спутника Юпитера, 8 спутников Сатурна и 5 спутников Урана.

Так как резонансные соотношения соответствуют невозмущенной задаче ($\varepsilon = 0$), то при вычислениях в конкретной задаче следует считать вектор \vec{n} резонансным, если его скалярное произведение на вектор частот $\vec{\omega}$ хотя и не равно нулю, но порядка ε : $(\vec{n}, \vec{\omega}) \sim \varepsilon$. Для Солнечной системы, где $\varepsilon \sim 10^{-3}$ (отношение масс планет к массе Солнца), это дает величину скалярного произведения в несколько тысячных. Такое ожидание оправдывается: основной резонанс Солнечной системы — резонанс 5: 2 для частот Юпитера и Сатурна — имеет точность около $1/2\%$ (0,0067). Из приводимых ниже 22 резонансных соотношений только 3 имеют меньшую точность, причем даже самое «плохое» из них — резонанс 1 : 2 для Нептуна и Урана — имеет все-таки точность в $1^{1/2}\%$. В таблице частот ⁽⁴⁾ за единицу принята частота наиболее массивного тела в каждой системе.

Таблица частот

Планеты	Спутники Юпитера			Спутники Сатурна		
Меркурий	49,22	Ио	4,044	Мимас	16,918	
Венера	19,29	Европа	2,015	Эпелад	11,639	
Земля	11,862	Ганимед	1,000	Тефия	8,448	
Марс	6,306	Калисто	0,4288	Диона	5,826	
Юпитер	1,000			Рея	3,530	
Сатурн	0,4027	Спутники Урана		Титан	1,000	
Уран	0,14119	Миранда	6,529	Гиперион	0,7494	
Нептун	0,07197	Ариель	3,454	Япет	0,2010	
Плутон	0,04750	Умбриель	2,400			
		Титания	1,000			
		Оберон	0,6466			

Таблица векторов резонанса

Планеты	Спутники Сатурна		
(1 1 2 1 0 0 0 0)	(1 0 -2 0 0 0 0 0)		
(-0 -1 0 3 0 1 0 0)	(0 -1 0 2 0 0 0 0)		
(0 0 -1 2 -1 1 -1 0)	(0 0 -1 0 2 1 0 2)		
(0 0 0 1 -6 0 -2 0)	(0 0 0 -1 2 -1 0 -1)		
(0 0 0 0 -2 5 0 0)	(0 0 0 0 1 -2 -2 0)		
(0 0 0 0 -1 0 7 0)	(0 0 0 0 0 3 -4 0)		
(0 0 0 0 0 0 -1 2)	(0 0 0 0 0 -1 0 5)		
(0 0 0 0 0 0 -1 0 3)			
Спутники Юпитера	Спутники Урана		
(1 -2 0 0)	(-1 1 1 1 0)		
(0 1 -2 0)	(0 1 -1 -2 1)		
(0 -3 0 7)	(0 0 -2 1 5)		
	(0 0 1 -4 3)		

Анализ таблиц резонансов приводит к следующим выводам:

1. Правило максимальной резонансности применимо ко всем системам спутников и к системе планет — число резонансных соотношений ровно на единицу меньше числа фаз.

2. Системы с небольшим числом членов довольно однородны — резонансные соотношения охватывают большинство участников.

3. Система планет и спутники Сатурна (состоящие из 9 и 8 членов соответственно) обнаруживают уже явную тенденцию к созданию гетерогенной структуры.

Действительно, система планет естественно разбивается на три группы: Меркурий — Венера — Земля — Марс, Юпитер — Сатурн и Уран — Нептун — Плутон. Внутри каждой группы есть объединяющие резонансы: первый, второй и третий для группы Земли, пятый для группы Юпитера, седьмой и восьмой для группы Урана, причем ясно видна подчиненная роль группы Земных планет по отношению к другим группам. Особую роль играют четвертый и шестой резонансы, объединяющие три коалиции в единую Солнечную систему.

Система спутников Сатурна обнаруживает похожее строение, но коалиции более равноправны. Самы коалиции таковы: Мимас — Тефия, Энцелад — Диона, Рея — Титан — Гиперион — Япет. В таблице легко найти «местные» и «общие» резонансы.

п. 5. О законе планетных расстояний. Отметим важное свойство состояний с максимальным индексом сложности. Состояния с максимальным индексом сложности однозначно задаются таблицей резонансов. Действительно, в этом случае все частоты можно выразить через одну, которая остается свободной. Изменение свободной частоты соответствует просто изменению масштабов системы.

Конкретно для планетных систем это означает, что постановка вопроса о законе планетных расстояний⁽⁵⁾ неудачна, так как простые целочисленные соотношения получаются не для расстояний, а для частот, через которые расстояния определяются однозначно. К тому же закон планетных расстояний, если и применим, то только для планет, в то время как правило максимальной сложности резонанса одинаково хорошо годится для всех разобранных случаев.

Невозможно удержаться от замечания, что целочисленность, связываемая обычно с квантовой физикой, есть, вероятно, общее свойство достаточно старых систем. Просто квантовые системы для нас всегда старые, так как их масштаб времени обычно ничтожен, и мы «застаем» их уже проэволюционировавшими. Возможно, что именно поэтому целочисленность заставила обратить на себя внимание прежде всего в физике элементарных частиц и даже определила ее название — квантовая.

Кратко основную идею можно сформулировать так: резонансность системы является следствием (и признаком) ее эволюционной зрелости.

Такая точка зрения находит любопытное подтверждение в обстоятельстве, обычно отмечаемом только в качестве забавной случайности. Известно⁽⁶⁾, что движение в произвольном центральносимметричном поле, вообще говоря, двухчастотно, причем угловая и радиальная частоты никак не связаны друг с другом. Но как раз в случае ньютоновского потенциала имеет место тождественный (при всех значениях момента и энергии) резонанс 1 : 1 этих частот. Следовательно, уже движение одной планеты удовлетворяет правилу максимальной резонансности. Этот факт весьма удовлетворителен с эволюционной точки зрения, так как ньютоновский потенциал соответствует взаимодействиям с наибольшими масштабами времени — электрическому и гравитационному.

Известен еще один тождественно резонансный потенциал — потенциал гармонического осциллятора с резонансом 1 : 2. Было бы интересно доказать, что других тождественно резонансных потенциалов не существует.

Поступило
26 VIII 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Дж. Биркгоф, Динамические системы, М.—Л., 1941; А. Я. Хинчин, Математические основания статистической механики, М., 1943. ² И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М.—Л., 1951. ³ И. М. Виноградов, Основы теории чисел, М.—Л., 1952. ⁴ Большая советская энциклопедия, 40, стр. 27, стр. 346. ⁵ О. Ю. Шmidt, Происхождение Земли и планет, М., 1962. ⁶ Л. Д. Ландау, Механика, М., 1958.